МНОГОСВЯЗНОСТЬ ПО УПРАВЛЕНИЮ

ПЕРЕЛЬМАН И. И., ЛАРИЧЕВ О. И.

Введение. Рассмотрим систему, состоящую из N контуров:

$$F_i [x_i(t)] = U_i, \quad i=1,\dots,N \tag{1}$$

где $F_i[x_i(t)]$ — линейный дифференциальный оператор i-го контура; $x_i(t)$— выходная координата i-го контура; $U_i(t)$ — управление i-го контура.

Пусть имеется q-мерный вектор $Y(q \geqslant N)$, в число компонент которого входит по одной (по крайней мере) координате каждого из контуров.

Связь между контурами заключается в том, что вектор Y ограничен замкнутой областью Ω q-мерного пространства:

$$Y \in \Omega. \tag{2}$$

Предполагаем, что Ω не является q-мерным параллелепипедом со сторонами, параллельными осям.

Назовем такие системы системами со связью по ограничению.

Если при протекании процесса в системе (1) вектор Y не достигает границ области Ω, то систему (1) можно рассматривать как совокупность из N линейных, независимых контуров. Очевидно, что эти контуры взаимосвязаны лишь тогда, когда в ходе процесса регулирования на каком-то отрезке времени τ конец вектора Y находится на границе области Ω. При этом система (1) становится существенно нелинейной. В данной работе рассматривается частный случай системы (1) с ограничением (2) системы с ограниченными ресурсами управления.

При этом ограничение (2) записывается в виде:

$$\overline{U} \in U^*, \tag{3}$$

где: $\overline{U}$ — вектор управления с координатами $U_1,\dots,U_N$; U^* — замкнутая область N-мерного пространства управлений, охватывающая начало координат.

Назовем систему (1) с ограничением (3) системой со связью по управлению.

Пусть в системе (1) задан критерий качества работы в виде минимизируемого функционала:

$$I = I\,[x_i(t),\ \dot{x}_i(t), \dots, t,\ u_i]. \quad i=1,\dots,N \tag{4}$$

Так как управление системы ограниченно (3), то при переводе системы (1) в любое заданное положение встает задача минимизации (4) при учете ограничения (3).

2. Некоторые примеры систем со связью по управлению. А) В пространстве находится круглое тело M, вращающееся относительно всех трех

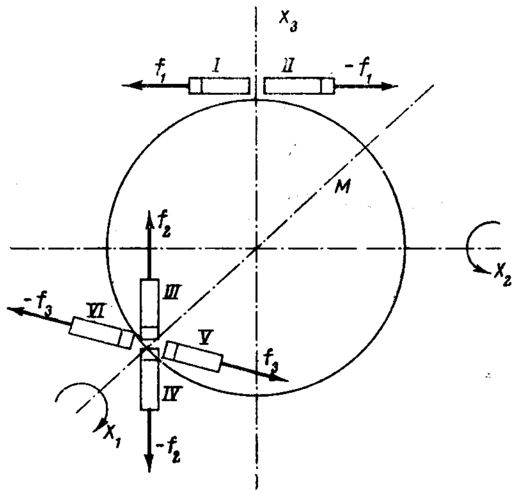

Рис. 1

осей. Крутящие моменты создаются реактивными двигателями I—VI (рис. 1), установленными на поверхности тела.

Введем следующие обозначения расходов топлива: $\pm g_1(t)$— двигателями I и II; $\pm g_2(t)$ — двигателями III и IV; $\pm g_3(t)$ — двигателями V и VI.

Пусть общий расход топлива двигателями тела M ограничен (например, имеется общая камера сгорания):

$$\sum_{i=1}^{3} |g_i(t)| \leqslant A. \tag{5}$$

Поставим следующую задачу: за минимальное время перевести тело M в заданное ориентированное положение в пространстве.

Близкая к сформулированной выше задача была поставлена в [1]. Запишем уравнения Эйлера для вращающегося тела:

$$\begin{aligned} I_1\dot{x}_1(t) &= (I_2 - I_3)\,x_2(t)\,x_3(t) + cf_1(t); \\ I_2\dot{x}_2(t) &= (I_3 - I_1)\,x_3(t)\,x_1(t) + cf_2(t); \\ I_3\dot{x}_3(t) &= (I_1 - I_2)\,x_1(t)\,x_2(t) + cf_3(t), \end{aligned} \tag{6}$$

где $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ — угловые скорости относительно соответствующих осей; I_1, I_2, I_3 — моменты инерции относительно осей; $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ — силы тяги реактивных двигателей; c — постоянная величина.

Полагаем, что

$$I_1 = I_2 = I_3. \tag{7}$$

Обозначим через $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$, $\varepsilon_3(t)$ отклонения по соответствующим осям положения тела от заданных значений и через $D(p)$ оператор, характеризующий зависимость силы тяги реактивного двигателя от расхода энергии ($p = d/dt$). Тогда уравнения (5) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} D(p)\cdot p^2\cdot\varepsilon_1(t) &= cg_1(t); \\ D(p)\cdot p^2\cdot\varepsilon_2(t) &= cg_2(t); \\ D(p)\cdot p^2\cdot\varepsilon_3(t) &= cg_3(t). \end{aligned} \tag{8}$$

Уравнения (8) записаны для системы, состоящей из 3 контуров со связью по управлению (5).

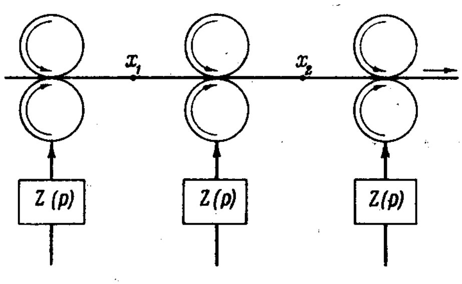

Рис. 2

Б) В непрерывном листопрокатном горячем стане между каждой парой клетей (рис. 2) должна поддерживаться заданная величина продольного натяжения металла. Рассогласования в натяжении возникают под влиянием внешних возмущений, как, например, изменение температуры, перемещение нажимных винтов и так далее. Они ухудшают качество проката и создают угрозу аварий на прокатном стане. Регулировка натяжения может быть осуществлена путем управления скоростями главных приводов, как это следует из известного технологического соотношения:

$$x_i(t) = k_{i1}x_{i-1} + k_{i2}x_{i+1} + \int_0^t (k_{i3}\Delta n_{i+1} - k_{i4}\Delta n_i)\, dt, \quad i=1,\dots,N \tag{9}$$

где $x_i(t)$ — изменение натяжения между клетями с номерами $i-1$ и i; ($x_{i-1}=0$ при $i=1$ и $x_{i+1}=0$ при $i=N$); Δn_i — приращение скорости привода i-й клети; $k_{i1} \div k_{i4}$ — постоянные коэффициенты.

Из (9) следует, что при увеличении скорости вращения валков натяжение перед клетью увеличивается, а за клетью — уменьшается.

Обозначим через $g_i(t)$ приращение сигнала управления i-м приводом, связанное с Δn_i линейным дифференциальным уравнением:

$$\Delta n_i(t) = z_i(p) \cdot g_i(t), \tag{10}$$

где $p = d/dt$; $z_1(p)$ — дробно-рациональная функция от p. Обычно сигнал управления ограничен по модулю:

$$(g_i)_{max} \geqslant g_i \geqslant (g_i)_{min}. \tag{11}$$

В работе [2] показано, что при предположении о равенстве передаточных функций приводов, а также о том, что коэффициенты k_{i1}, k_{i2} в уравнении (9) достаточно малы (что справедливо для процессов прокатки на горячих непрерывных станах) уравнение (9) можно записать в виде:

$$x_i^*(t) = \frac{z(p)}{p}(k_{ii}g_i + k_{i,i+1} \cdot g_{i+1}), \tag{12}$$

где k_{ij} — заданные постоянные коэффициенты.

Уравнение (12) описывает систему со связью по управлению. Действительно, выбор уравнения в одном из контуров уменьшает свободу выбора управления в соседних контурах.

В) Пусть контуры системы (1) безынерционные и задана область U^*. Поставим следующую задачу: найти такое управление системой (1), чтобы определенная функция от координат системы:

$$f = f(x_1, \dots, x_N) \tag{13}$$

принимала бы максимальное значение.

Уравнение $C = f(x_1, \dots, x_N)$ описывает определенную гиперповерхность. Если эта гиперповерхность касается поверхности области U^*, то точка касания определяет решение поставленной задачи, т. е. максимальное значение (13) при заданном ограничении (3).

В частном случае, когда U^* — многогранник, а $f(x_1, \dots, x_N)$ — линейная (относительно x_i) функция, сформулированная выше задача относится к обширному классу задач, для решения которых применим метод линейного программирования [4].

3. Оптимальное управление многосвязными системами со связью по управлению. Так как характерные, отличительные черты системы (1) определяются ограничением (3), то наибольший интерес представляет задача оптимального (с точки зрения заданного критерия (4)) управления системой (1).

Математической особенностью систем со связью по управлению является невыполнение (в общем случае) условия общности положения [3].

Сформулируем это условие. Запишем уравнение системы (1) в матричной форме:

$$\dot{y} = Ay + BU, \tag{14}$$

где y — вектор, характеризующий состояние системы; U — вектор управления; A — матрица $n \times n$ постоянных коэффициентов; B — матрица $n \times N$ постоянных коэффициентов.

Пусть на вектор $\overline{U}$ наложено ограничение (3) и U^* —выпуклый замкнутый, ограниченный многогранник. Условие общности положения заключается в следующем: векторы $Bw, ABw, \ldots, A^{n-1}Bw$ должны быть линейно независимыми (w — вектор, имеющий направление одного из ребер многогранника U^*).

На основе выполнения условия общности положения доказаны многие теоремы теории оптимального управления, в том числе и большинство теорем гл. 3 в работе [3]. В связи с этим возникает необходимость доказательства основных теорем о существовании и единственности оптимального управления в системах со связью по управлению.

Далее рассматриваются эти вопросы для случая оптимальности по быстродействию.

Теорема 1. Если все контуры системы (1) управляемые, то существует оптимальное по быстродействию управление (относящееся к классу ограниченных и измеримых), переводящее эту систему в любое заданное положение. Для доказательства используем теорему, доказанную в [3]:

Если в системе существует хотя бы одно управление, переводящее изображающую точку системы из начального положения X_0 в заданное положение X_1, то существует и оптимальное по быстродействию управление, осуществляющее этот перевод.

Выделим в области U^* N-мерный квадрат, симметричный относительно начала координат и со сторонами, параллельными осям U_i. Заменим этим квадратом действительную область управления U^*. Тогда система (14) распадается на N независимых контуров.

Если эти контуры управляемые, то систему (14) можно перевести в любое заданное положение, что и требовалось доказать.

Теорема 2. Необходимым условием неединственности оптимального управления в системе (14) с ограничением на управление (3) является такой вид области U^*, что ее поверхности может принадлежать прямая линия конечной длины. Доказательство теоремы дается в [5].

Согласно [3], для определения оптимального по быстродействию управления системой (14) со связью по управлению применим принцип максимума [3]. Однако для определенного класса систем имеется более простой способ решения этой задачи, чем непосредственное применение принципа максимума. К этому классу относятся системы с одинаковыми контурами, характеристическое уравнение которых не содержит комплексных корней и для которых уравнение (3) имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{N} |U_i| \leqslant K = \text{const}. \tag{15}$$

Изложим основную идею этого способа.

Пусть в системе (1) с N одинаковыми контурами найдено какое-то допустимое управление, переводящее систему в заданное положение.

Запишем уравнение контура в матричном виде:

$$\dot{z}_i = Cz_i + dU_i, \tag{16}$$

где z_i — ν-мерный вектор, характеризующий состояние контура; d — ν-мерный постоянный вектор, у которого только ν-й элемент не равен нулю; C — матрица $\nu \times \nu$ постоянных коэффициентов; U_i — управление.

Как известно, решение (16) имеет вид:

$$z_i(t) = z_i(0)\, e^{Ct} + \int_0^t e^{C(t-\tau)} \cdot d \cdot U_i(\tau)\, d\tau. \tag{17}$$

Сложим уравнения (17) для контуров системы и получим:

$$\sum_{i=1}^{N} z_i(t) = e^{Ct}\cdot\sum_{i=1}^{N} z_i(0) + \int_0^t e^{C(t-\tau)}\cdot d\cdot\sum_{i=1}^{N} U_i(\tau)\cdot d\tau. \qquad (18)$$

Вводя обозначения:

$$\sum_{i=1}^{N} z_i(t) = x(t), \qquad (19)$$

$$\sum_{i=1}^{N} U_i(t) = U_\Sigma(t), \qquad (20)$$

перепишем (18) в виде:

$$x(t) = e^{Ct}x(0) + \int_0^t e^{C(t-\tau)}\cdot d\cdot U_\Sigma(\tau)\, d\tau. \qquad (21)$$

Уравнение (21) записано для такой же системы, как каждый из контуров, имеющий управление (20) и начальные условия, полученные суммированием начальных условий контуров. Назовем эту систему эквивалентной.

Очевидно, что в общем случае время окончания процесса в эквивалентной системе равно наибольшему из времен окончания процессов в контурах исходной системы:

$$T_{\text{экв}} = \max T_i. \qquad (22)$$

Но для эквивалентной системы нетрудно определить оптимальное управление и минимальное время протекания процесса регулирования. Для этой цели можно использовать теорему Фельдбаума об n интервалах [6], так как управление эквивалентной системы ограничено по модулю (15) и характеристическое уравнение системы (согласно условию) не имеет комплексных корней. Определим $(U_{\text{экв}})_{\text{оптим}}$ и $(T_{\text{экв}})_{\text{мин}}$.

При правильном суммировании начальных условий контуров, найденное значение $(T_{\text{экв}})_{\text{мин}}$ определяет (согласно (22)) минимальное время протекания процесса регулирования в исходной системе. Исходя из этого, можно сформулировать основное условие оптимальности для рассматриваемой задачи.

Управления в контурах должны выбираться так, чтобы сумма их составляла оптимальное управление для эквивалентной системы.

В работе [7] сформулировано и доказано правило суммирования начальных условий контуров (для получения начальных условий эквивалентной системы), изложен алгоритм «разделения» полученного оптимального управления эквивалентной системы на управления в контурах.

Метод эквивалентной системы значительно упрощает решение поставленной задачи. Этот метод может быть использован при определении оптимального управления в системе (8).

4. Субоптимальное управление многосвязными системами со связью по управлению. Трудности построения оптимальных систем со связью по управлению делают желательным создание близких к оптимальным систем с достаточно простым алгоритмом управления. Назовем такие системы субоптимальными. Очевидно, что задача построения субоптимальных систем не является однозначной. Поэтому предлагаемый ниже алгоритм субоптимального управления представляется наиболее возможным, но не является единственным.

Сформулируем этот алгоритм:

1) Выбор функций сравнения контуров. Функции сравнения представляют собой меру потребности контуров в управлении.

В общем случае:

$$W_i(t) = f_i[I, x_i(t), \ldots, x_i^{(k)}(t), \quad x_i^{(k+1)}(t), \ldots, x_i^{(n)}(t)], \tag{23}$$

где $W_i(t)$ — функция сравнения i-го контура; $x_i(t)$ — выходная переменная i-го контура; I — минимизируемый функционал.

2) Выбор способа распределения управления по контурам в зависимости от функций сравнения.

В общем случае

$$U_i(t) = \varphi(W_1, W_2, \ldots, W_N). \tag{24}$$

3) Определение возможного увеличения величины минимизируемого функционала по сравнению с оптимальной системой. Полученная оценка характеризует качество субоптимального управления.

Введем следующие определения.

Назовем верхнюю и нижнюю границы проекции области U^* на координатную ось U_i абсолютным максимумом и минимумом управления для i-го контура. Минимальные и максимальные значения управления в i-м контуре, достигаемые при предварительном выборе управления в другом j-м контуре, назовем условными минимумом и максимумом 1-го порядка.

Вообще условными минимумом и максимумом k-го порядка ($k = 1, \ldots, N - 1$) сигнала управления i-м контуром назовем максимально и минимально возможные значения U_i при условии, что в k других контурах системы уже произведен выбор управления.

Очевидно, что величина условного максимума и минимума k-го порядка зависит от номеров контуров, в которых осуществляются экстремумы более низких порядков, и от характера этих экстремумов (минимум или максимум). Управление U_i может иметь $A_{N-1}^{k-1} \cdot 2^k$ различных значений условных максимумов и минимумов k-го порядка (A — число размещений).

Примем, что абсолютный экстремум управления и условные экстремумы порядка $1, 2, \ldots, N - 1$ реализуются в момент времени t в контурах с номерами соответственно $a_1, \ldots, a_N$, если

$$W_{a_1} > W_{a_2} > \ldots > W_{a_N} \tag{25}$$

Это же распределение порядков реализации экстремумов сохраняется на отрезке времени Δt, на котором справедливо (25).

Идея предлагаемого способа соответствует альтернативному принципу, предложенному Заде [8]. Отличительная черта альтернативного принципа состоит в том, что выбирается управление, лучшее с точки зрения протекания процесса в системе на каком-то определенном отрезке времени. Очевидно, что такое управление не является оптимальным, но его реализация значительно проще. Задача состоит далее в выборе функций сравнения контуров W_i достаточно простого вида. Функции W_i получаются простыми, если их определять не на основании протекания всего процесса регулирования, а с точки зрения протекания процесса на некотором ближайшем отрезке времени, ограниченном моментом попадания изображающей точки какого-либо из контуров на определенные гиперплоскости.

В работе [2] решается задача построения субоптимального управления в системе со связью по управлению для случая, когда нет строгого обоснованного критерия качества работы системы в виде (4). Решение проводится применительно к изложенной ранее задаче регулирования натяжения на непрерывном прокатном стане. В работе [2] определяются функции сравнения контуров, исследуются режимы работы субоптимальной системы. Результаты исследований позволяют сделать вывод о целесообразности построения субоптимальных систем.

Системы со связью по управлению представляют собой интересный класс многосвязных систем. Построение оптимального и субоптимального управления такими системами позволяет решить важную задачу рационального распределения ограниченных ресурсов управления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Athans M., Falb P. L., Lacoss R. T. Time-optimal velocity control of a spinning space body.— JEEE Trans. on Applic. and Ind., 1963, No 6.
2. Ларичев О. И., Перельман И. И. О субоптимальном управлении многосвязными системами со связью по управляющим воздействиям.—Автомат. и телемех., 25, 1964, № 4.
3. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М., Физматгиз, 1961.
4. Гасс С. Линейное программирование. М., Физматгиз, 1961.
5. Ларичев О. И. О единственности оптимального по быстродействию управления в одном классе многосвязных систем.— Автомат. и телемех., 26, 1965, № 1.
6. Фельдбаум А. А. Вычислительные устройства в автоматических системах. М., Физматгиз, 1959.
7. Ларичев О. И. Оптимальное управление одним классом многосвязных систем.— Изв. АН СССР, техн. кибернет., 1964, № 5.
8. Заде Л., Итон Д. Альтернативный принцип для улучшенного управления.— Автомат. и телемех., 24, 1963, № 3.

Ларичев О. И., Перельман И. И. Многосвязанность по управлению // Сборник «Теория многосвязного регулирования».—М.: Наука, 1967.— С. 69–75.

```
@InBook{Larichev_Perelman_1967,
  author =        "Ларичев, О. И. and Перельман, И. И.",
  title =         "Многосвязанность по управлению",
  booktitle =     "Сборник <<Теория многосвязного регулирования>>",
  editor =        "",
  publisher =     "Наука",
  pages =         "69--75",
  address =       "М.",
  year =          "1967",
  language =      "russian",
}
```